Chapitre n° 3 Combinatoire et dénombrement

Terminale, spécialité mathématique, 2021-2022

1 Principes additifs et multiplicatifs

1.1 Principe additif

Définition 1 (Ensemble)

Un ensemble A est une collection d'objets x distincts qu'on appelle éléments.
On dit alors que x appartient à A (respectivement x n'appartient pas à A) et on note $x \in A$ (resp. $x \notin A$).
Un ensemble A est dit fini s'il possède un nombre fini n d'éléments (n entier).
On note dans ce cas Card (A) (on lit « cardinal de A ») le nombre d'éléments de l'ensemble A, mais on peut aussi le noter $|A|$ ou $\#A$.
Un ensemble infini est un ensemble non fini.

Exemple 1. $A = \{a; b; c\}$ est un ensemble à 3 éléments, c'est-à-dire $|A| = 3$
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sont des ensembles infinis.
L'unique ensemble ne contenant aucun élément est l'ensemble vide, noté $\emptyset$; il vérifie $|\emptyset| = 0$.

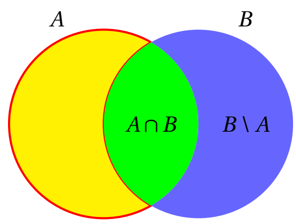
Propriété 2 (Principe additif)

Soient A et B deux ensembles finis de cardinaux m et n.

1. Si les ensembles A et B sont **disjoints** (c'est-à-dire d'intersection l'ensemble vide) on a :
   Card $(A \cup B)$ = Card (A) + Card (B)
2. Si A et B sont quelconques alors :
   Card $(A \cup B)$ = Card (A) + Card (B) - Card $(A \cap B)$

Preuve. ① paraît évident mais une démonstration rigoureuse requiert la notion de bijection, donc on l'admet.

② L'ensemble $(A \cup B)$ est la réunion disjointe des ensembles finis A et $B \setminus A$:
Card $(A \cup B)$ = Card A + Card $(B \setminus A)$
L'ensemble B est la la réunion disjointe des ensembles finis $B \setminus A$ et $A \cap B$:
Card B = Card $(B \setminus A)$ + Card $(A \cap B)$
En soustrayant les deux égalités précédentes on obtient :
Card $(A \cup B)$ = Card (A) + Card (B) - Card $(A \cap B)$



Exemple 2.

① Si $A = \{a ; b\}$ et $B = \{b ; c ; d\}$ alors :
$$\begin{cases} A \cup B = \{a ; b ; c ; d\} \\ A \cap B = \{b\} \end{cases} \Longrightarrow \text{Card } (A \cup B) = 2 + 3 - 1 = 4$$

② Si $B = \{b ; c ; d\}$ et $C = \{f\}$ alors :
$$\begin{cases} B \cup C = \{b ; c ; d ; f\} \\ B \cap C = \emptyset \end{cases} \Longrightarrow \text{Card } (B \cup C) = 3 + 1 = 4$$

1.2 Principe multiplicatif

Définition 3 (couples, triplets)

Soit E un ensemble de cardinal $n > 3$.

① Un **couple** de E est la donnée de deux éléments a et b de E dans un ordre particulier. On le note $(a;\ b)$.
Attention les couples $(a;\ b)$ et $(b;\ a)$ sont différents.

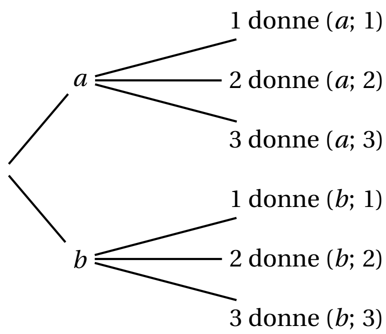
② Un **triplet** de E est la donnée de trois éléments a, b et c de E dans un ordre particulier. On le note $(a;\ b;\ c)$.
Attention les triplets $(a; b; c)$ et $(a; c; b)$ sont différents.

Définition 4 (Produit cartésien)

Soient E et F deux ensembles de cardinaux n et m.
Le produit cartésien de deux ensembles finis E et F est l'ensemble des couples $(x;\ y)$ où x est un élément de E et y un élément de F.

Exemple 3.

Si $E = \{a; b\}$ et $F = \{1;\ 2;\ 3\}$ alors le produit cartésien de E et F est :
$E \times F = \{(a;\ 1);\ (a;\ 2);\ (a;\ 3);\ (b;\ 1);\ (b;\ 2);\ (b;\ 3)\}$
On peut représenter ce produit à l'aide d'un tableau ou d'un arbre.
On eut avoir $a = 1$ et $b = 2$, les couples $(1;\ 2)$ et $(2;\ 1)$ sont distincts ;
alors que les ensembles $\{1;\ 2\}$ et $\{2;\ 1\}$ sont égaux.



Propriété 5 (Cardinal du produit cartésien)

Soient E et F deux ensembles de cardinaux n et m, alors le produit cartésien $E \times F$ est un ensemble fini dont le nombre d'éléments est $m \times n$:

$$\text{Card}\ (E \times F) = \text{Card}\ \ E\ \times\ \text{Card}\ F = m \times n$$

Preuve. Hors programme
Soient E et F deux ensembles de cardinaux m et n et $(x;\ y)$ un élément de l'ensemble $E \times F$.
On note $\{e_1;\ \dots;\ e_m\}$ l'ensemble des m valeurs possibles pour x.
L'ensemble de tous les couples $(x;\ y)$ possibles peut s'écrire :
$G = G_1 \cup G2 \cup \dots\dots G_m$ où, pour i fixé dans $[\![1;\ m]\!]$, G_i est l'ensemble $\{(a_i; y); y \in F\}$.
Pour i fixé dans $[\![1;\ m]\!]$, il y a autant d'éléments dans G_i que de y dans F, c'est-à-dire n.
Donc G est fini, car réunion finie d'ensembles finis, et comme la réunion est disjointe on a :
$\text{Card}\ G = \sum_{i=1}^{m} \text{Card}\ G_i = \sum_{i=1}^{m} n = m \times n$

2 Dénombrement des k-uplets (ou k-listes) d'un ensemble fini E

2.1 k-uplets (ou k-listes) d'un ensemble fini E

Définition 6 (k-uplet ou k-liste)

Soient E un ensemble de cardinal n et k un entier naturel non nul.
Un k-uplet (ou k-liste) est une liste ordonnée $(e_1;\ e_2;\ \dots;\ e_k)$ de k éléments de E, non nécessairement distincts.
L'ensemble de tous les k-uplets de E est l'ensemble :

$$\underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{k \text{ fois}} = E^k$$

Exemple 4. ① Un code de carte bancaire est un 4-uplet de $E = \{0;\ 1;\ \dots;\ 9\}$.
Par exemple : $(0;\ 0;\ 2;\ 5) \in E^4$ ou $(1;\ 7;\ 7;\ 7) \in E^4$.

② Un « mot » de 5 lettres est un 5-uplet de l'alphabet $A = \{a;\ b;\ \dots;\ z\}$.
Par exemple, $(m;\ m;\ m;\ a;\ z) \in A^5$ ou $(s;\ a;\ l;\ u;\ t) \in A^5$.
Attention, un « mot » n'a pas nécessairement de sens.

2.2 Dénombrement des k-uplets (ou k-listes) d'un ensemble fini E

Propriété 7 (Dénombrement des k-uplets)

Soient E un ensemble de cardinal n et k un entier naturel non nul.
Le nombre de k-uplets de E est n^k.

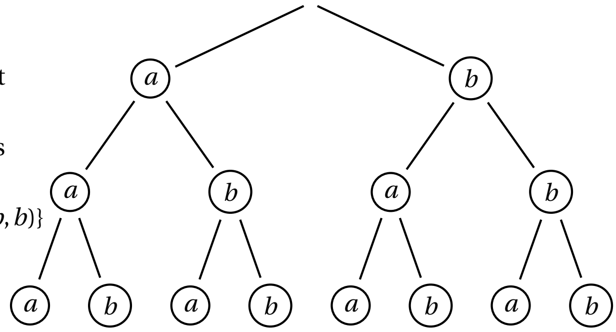
$$\text{Card } E^k = (\text{Card } E)^k = n^k$$

Preuve. Soient E un ensemble de cardinal n et k un entier naturel non nul.
Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons cette propriété par récurrence sur k.
Notons pour tout entier naturel $k > 1$ la propriété $P(k)$:« $\text{Card } \left(E^k\right) = (\text{Card } E)^k = n^k$ »

- ⋆ Initialisation
  Pour $k = 1$, la propriété $P(k)$ est vraie puisque $\text{Card } \left(E^1\right) = \text{Card } E = n = n^1$
- ⋆ Hérédité
  Supposons que $P(k)$ soit vraie pour un certain entier k fixé, et montrons qu'alors la propriété est aussi vraie au rang $k+1$.
  Soit k un entier naturel non nul. On a :
  $$\text{Card } \left(E^{k+1}\right) = \text{Card } \left(E^k \times E\right)$$
  On applique alors la la propriété 5 ($\text{Card } (E \times F) = \text{Card } E \times \text{Card } F$), ce qui donne ici :
  $$\text{Card } \left(E^{k+1}\right) = \text{Card } \left(E^k\right) \times \text{Card } E$$
  On applique alors l'hypothèse de récurrence : $\text{Card } \left(E^k\right) = (\text{Card } E)^k = n^k$.
  $$\begin{aligned}\text{Card } \left(E^{k+1}\right) &= \text{Card } \left(E^k\right) \times \text{Card } E \\ &= (\text{Card } E)^k \times \text{Card } E \\ &= (\text{Card } E)^{k+1}\end{aligned}$$
  On a alors montré que $P(k) \implies P(k+1)$
- ⋆ Conclusion
  La propriété $P(k)$ est vraie pour $k = 1$ et est héréditaire, est vraie pour tout entier $k \geq 1$:
  $$\forall k \geq 1,\ \text{Card } \left(E^k\right) = (\text{Card } E)^k = n^k$$

Exemple 5.

Si $E = \{a;\ b\}$ on a $n = \text{Card}\,E = 2$ et le nombre de 3-uplets de E est $n^3 = 2^3 = 8$.
On peut le vérifier à l'aide d'un arbre en écrivant l'ensemble de tous les 3-uplets de E.
$E^3 = \{(a,a,a);\ (a,a,b);\ (a,b,a);\ (a,b,b);\ (b,a,a);\ (b,a,b);\ (b,b,a);\ (b,b,b)\}$



3 Nombre de parties d'un ensemble

Définition 8 (Parties d'un ensemble E)

① On dit que A **inclus dans** E, et on note $A \subset E$, si tout élément de A est élément de E.
On dit aussi que l'ensemble A **est une partie (ou sous-ensemble) de l'ensemble** E.

② $\mathscr{P}(E)$ **désigne l'ensemble de toutes les parties de E.**

③ **L'ensemble vide** $\emptyset$ est une partie de tout ensemble E.

Exemple 6. ① Si $E = \emptyset$, alors l'ensemble des parties de E est l'ensemble à un seul élément $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset\}$.

② Si $E = \{a\}$, alors l'ensemble des parties de E est l'ensemble à deux éléments $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset;\ \{a\}\}$

③ Si $E = \{a;\ b\}$, alors l'ensemble des parties de E est constitué de 4 éléments, les sous-ensembles :
- ⋆ à 0 élément soit : $\emptyset$;
- ⋆ à 1 élément soit : $\{a\}$ et $\{b\}$; Donc $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset;\ \{a\};\ \{b\};\ \{a;\ b\}\}$
- ⋆ à 2 éléments soit : $\{a;\ b\} = E$;

④ Si $E = \{a;\ b;\ c\}$, alors l'ensemble des parties de E est constitué de 8 sous-ensembles :
$\mathscr{P}(E) = \{\emptyset;\ \{a\};\ \{b\};\ \{c\};\ \{a;\ b\};\ \{a;\ c\};\ \{b;\ c\};\ \{a;\ b;\ c\}\}$

On peut légitimement se demander quel est le nombre de sous-ensembles d'un ensemble de cardinal n, c'est-à-dire quel est le cardinal de $\mathscr{P}(E)$

Propriété 9 (Nombre de parties de E)

Soit E un ensemble de cardinal n, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
Le nombre de partie de E est 2^n c'est-à-dire $\text{Card}\,(\mathscr{P}(E)) = 2^n$

Preuve nº 1 Soit $E = \{e_1;\ \dots;\ e_n\}$ un ensemble de cardinal n.
On associe à chaque partie A de E un unique n-uplet de l'ensemble $\{0;\ 1\}$ de la manière suivante :
• pour tout entier i de 1 à n, on note 1 si e_i est dans A ;
• et 0 sinon.
Par exemple on associe à $A = \{e_1;\ e_3\}$ le n-uplet $\{1;\ 0;\ 1;\ 0;\ \dots;\ 0\}$.
Cette association est une fonction de $\mathscr{P}(E)$ dans $\{0;\ 1\}^n$, et cette fonction est une *bijection*, c'est-à-dire qu'à tout élément A de $\mathscr{P}(E)$ correspond un unique élément de $\{0;\ 1\}^n$, et *réciproquement*.
De ce fait le nombre de parties de E est égale au nombre de n-uplets de l'ensemble $\{0;\ 1\}$, c'est-à-dire $(\text{Card}\,\{0;\ 1\})^n$ d'après la propriété 7, soit $\text{Card}\,(\mathscr{P}(E)) = 2^n$

Preuve nº 2 Montrons par récurrence que la propriété $P(n)$: « Un ensemble à n éléments a 2^n parties » est vraie pour tout $n \geq 0$.

– Initialisation
Pour $n = 0$, la propriété $P(n)$ est vraie puisque si $E = \emptyset$, alors $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset\}$ et donc $\text{Card}\,(\mathscr{P}(E)) = 1 = 2^0$

– Hérédité
Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $P(n)$ vraie. Montrons qu'alors, $P(n+1)$ est vraie.
Considérons donc un ensemble E à $(n+1)$ éléments.
Alors, choisissons un $x \in E$, et posons $F = E \setminus \{x\}$ de sorte que $E = F \cup \{x\}$ où F est un ensemble ayant n éléments.
Il y a alors deux familles de parties de E :

- celles qui ne contiennent pas x, ce sont les parties de l'ensemble F et il y en a 2^n d'après l'hypothèse de récurrence ;
- celles qui contiennent x. On les obtient en adjoignant x à chacune des 2^n parties de F, il y en a donc aussi 2^n.

Ainsi, le nombre de parties de E est égal à $2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$. On a alors montré $P(n) \implies P(n+1)$ pour n arbitrairement fixé dans $\mathbb{N}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$.

– Conclusion
$P(n)$ est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, donc est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \text{Card}\ (E) = n \implies \text{Card}\ (P(E)) = 2^n$$

4 p-arrangements de E ou p-uplets d'éléments distincts de E et permutations

Soient n et p des entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$.

4.1 p-arrangements de E ou p-uplets d'éléments distincts de E

Définition 10 (p-arrangement ou p-uplets d'éléments distincts)

Soit E un ensemble de cardinal n.
On appelle p-arrangement de E ou p-uplet d'éléments distincts de E un p-uplet de E pour lequel tous les éléments sont différents.

Exemple 7. ① Soit $E = \{a;\ b;\ c\}$ alors $(a;\ b)$ et $(c;\ a)$ sont des 2-arrangements de E.
② Soit $E = \{a;\ b;\ c\}$ alors $(a;\ a)$ n'est pas un 2-arrangement de E car ses éléments ne sont pas tous distincts.
③ Soit $F = \{a;\ b;\ c;\ d\}$ alors $(a;\ b;\ d)$ et $(d;\ c;\ a)$ sont des 3-arrangements de F, mais pas $(d;\ a;\ d)$.

Propriété 11 (A_n^p : Nombre de p-arrangements d'un ensemble de cardinal n)

Soient n et p des entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$, et E un ensemble de cardinal n.
Le nombre de p-arrangements de E est égal à :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)$$

Preuve. Un p-arrangement de E est un p-uplet $(x_1;\ \ldots;\ x_p)$ d'éléments de E distincts deux à deux.
Se donner un tel arrangement, c'est dresser un arbre dont :

- le premier niveau a n branches, correspondant aux n choix possibles pour $x_1 \in E$;
- chaque branche du premier niveau donne naissance à $n-1$ branches, correspondant aux $n-1$ choix possibles pour $x_2 \in E \setminus \{x_1\}$;
- … ;
- chaque branche de l'avant dernier niveau donne naissance à $n-(p-1)$ branches, chacune correspondant à un choix possible pour $x_p \in E \setminus \{x_1;\ \ldots;\ x_{p-1}\}$;

Le nombre de p-arrangement de E est le nombre de feuilles de cet arbre, c'est-à-dire $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)$.

Exemple 8. ① Le nombre de 5-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à 8 éléments est 6 720 car :

$$A_8^5 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$$

② Lors d'une course du 100 mètres disputées par 8 athlètes, le nombre de podiums possibles correspond au nombre de 3-arrangements d'un ensemble à 8 éléments soit :

$$A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

4.2 Factoriel et A_n^p

Définition 12 (Factoriel)

Soit n un entier naturel non nul.
On appelle factorielle n, notée $n!$, le produit de tous les entiers compris entre 1 et n :

$$n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$$

On peut noter ce produit avec le symbole $\prod$:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

Par convention : $0! = 1$ (un produit vide est égal au nombre neutre pour le produit)

Remarque 1. Touche factorielle sur Casio : 8 OPTN F6 F3 F1

Exemple 9.

$$0! = 1;\ 1! = 1;\ 2! = 2;\ 3! = 6;\ 4! = 24;\ 5! = 120;\ 13! \simeq 6 \times 10^9;\ 50! \simeq 3 \times 10^{64}$$

Propriété 13 (A_n^p : nombre de p-arrangements de E)

Soient n et p des entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$.

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Preuve. Soient n et p des entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$.

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{(n-p)!} &= \frac{1 \times 2 \times \ldots \times n}{1 \times 2 \times \ldots \times (n-p)} \\
&= \frac{1 \times 2 \times \ldots \times (n-p) \times (n-p+1) \times \ldots \times n}{1 \times 2 \times \ldots \times (n-p)} \\
&= (n-p+1) \times \ldots \times n \qquad = A_n^p
\end{aligned}$$

4.3 Permutations d'un ensemble fini

Définition 14 (Permutations d'un ensemble fini)

Une **permutation** d'un ensemble fini E ayant n éléments est un n-arrangement de E, c'est-à-dire un n-uplet d'éléments tous distincts deux à deux de E.

Exemple 10. Soit $E = \{a;\ b;\ c\}$ alors $(a;\ b;\ c)$, $(a;\ c;\ b)$, $(b;\ c;\ a)$, $(c;\ a;\ b)$ sont des permutations de E.

On en déduit en appliquant la propriété 11 :

Définition 15 (Nombre de permutations de E)

Le nombre de permutations d'un ensemble E à n éléments est : $A_n^n = n!$

Exemple 11. Le championnat français de football oppose vingt clubs en une série de trente-huit rencontres jouées durant la saison.
Le classement des 20 équipes à l'issue de la saison est donc une permutation de l'ensemble des 20 équipes. Il y a donc dans 20! classements possibles, soit plus de 2 milliards de milliards (ou trillions)...

$$20! \simeq 2{,}43 \times 10^{18}$$

Pourtant, le PSG est toujours premier ces dernières années, les probabilités sont faites pour être défiées !

Remarque 2.

Le système français utilise par décret un système dit d'échelle longue proposé par le mathématicien français Nicolas Chuquet au 15e siècle. Le système de Nicolas Chuquet consiste à faire suivre les préfixes latins bi -, tri -, ... des suffixes - llion, ou - lliard pour former les noms d'unité successifs. Chaque unité vaut 10^6 fois l'unité précédente comme le montre le tableau ci-contre.
Attention, les anglo-saxons utilisent eux l'échelle courte qui consiste à faire suivre les préfixes bi-, tri-, ... du suffixe -llion (un seul suffixe, pas de -lliard), pour former les noms d'unité successifs donc chaque unité vaut 10^3 fois l'unité précédente. Indeed, a million still is 10^6, but a billion is 10^9, a trillion is $10^{12}, \dots$

désignation	valeur	nom dérivé	valeur
mi-llion	10^6	mi-lliard	10^9
bi-llion	10^{12}	bi-lliard	10^{15}
tri-llion	10^{18}	tri-lliard	10^{21}
quadri-llion	10^{24}	quadri-lliard	10^{27}
quinti-llion	10^{30}	quinti-lliard	10^{33}
sexti-llion	10^{36}	sexti-lliard	10^{39}
hepti-			
octi-			
noni-			
deci-			

5 Combinaisons

Soient n et p des entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$, et E un ensemble à n éléments.

5.1 Nombre de combinaisons

Définition 16 (Combinaisons)

Une combinaison de p éléments d'un ensemble fini E ayant n éléments est une partie de E ayant p éléments. Une telle partie est déterminée par ses éléments, indépendamment de leur ordre. Une combinaison de p éléments parmi n est donc un choix de p éléments parmi n.
On note $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons de p éléments de E mais aussi C_n^p. On peut le lire p parmi n.

Remarque 3. Pour une combinaison de p éléments, on ne tient pas compte de l'ordre des éléments, c'est ce qui la distingue des p-uplets ou p-listes.
Combinaison : tirage du loto (pas d'ordre) $\quad$ p-uplet ou p-liste : podium olympique ou tiercé (ordre).

Exemple 12. Soit $E = \{a;\ b;\ c;\ d\}$ un ensemble ayant $n = 4$ éléments.
On a alors :
- ⋆ 1 combinaison à 0 élément de E : $\emptyset$ donc $\binom{4}{0} = 1$;
- ⋆ 4 combinaisons à 1 élément de E : $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$ donc $\binom{4}{1} = 4$;
- ⋆ 6 combinaisons à 2 éléments de E : $\{a;\ b\}$, $\{a;\ c\}$, $\{a;\ d\}$, $\{b;\ c\}$, $\{b;\ d\}$, $\{c;\ d\}$ donc $\binom{4}{2} = 6$;
- ⋆ 4 combinaisons à 3 éléments de E : $\{a;\ b;\ c\}$, $\{a;\ b;\ d\}$, $\{a;\ c;\ d\}$, $\{b;\ c;\ d\}$, donc $\binom{4}{3} = 4$;
- ⋆ 1 combinaison à 4 éléments de E : $\{a;\ b;\ c;\ d\}$ donc $\binom{4}{4} = 1$;

Propriété 17

Soient n et p des entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$. L'ensemble E possède n éléments.

① $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}{p!}$

② $\binom{n}{p} = \dfrac{A_n^p}{p!}$

③ $\binom{n}{0} = 1\ ; \quad \binom{n}{1} = n\ ; \quad \binom{n}{n} = 1$

Preuve. Soient n et p des entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$ et E un ensemble à n éléments. Considérons l'application f qui, au p-arrangement $(a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_p)$ associe la partie $F = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_p\}$ de cardinal p de E.

Tout sous-ensemble $F = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_p\}$ de E de cardinal p a autant d'antécédents par f qu'il y a de façons d'ordonner ses éléments pour construire un p-arrangement contenant ces mêmes éléments. Ce nombre d'antécédents est donc le nombre de permutations de $F = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_p\}$, c'est-à-dire $p!$.

Ainsi pour toute partie F de E de cardinal p, il y a exactement $p!$ p-arrangements qui ont F pour image par la fonction f.

Le nombre d'images par la fonction f, c'est-à-dire le nombre de parties de E de cardinal p, s'obtient donc en divisant le nombre d'arrangements A_n^p par $p!$. De ce fait :

$$\frac{A_n^p}{p!} = \binom{n}{p}$$

Remarque : L'application f est dite surjective.
Une application surjective est une application pour laquelle tout élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent.

Remarque 4. Pour calculer $\binom{10}{5}$ sur Casio : 10 OPTN F6 F3 F3 5

6 Propriétés des nombres de combinaisons

6.1 Symétrie des nombres de combinaisons

Définition 18 (Symétrie)

Soient n et p des entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$.

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Preuve.

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!(p!} = \binom{n}{p}$$

La symétrie des coefficients binomiaux est logique : pour choisir p éléments parmi n, on peut choisir les $n-p$ éléments qu'on met de côté.

6.2 Développement de $(a+b)^n$

Propriété 19 (Formule du binôme de Newton)

Soient a et b deux nombres réels et n un entier.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

En réalité, cette formule était connue dès le X$^{\text{e}}$ siècle, en particulier des mathématiciens indiens (Halayudha), arabes et perses (Al-Karaji) et au XII$^{\text{e}}$ siècle, le mathématicien chinois Yang Hui la démontra indépendamment. En 1665, Newton la généralisa à des exposants non entiers.

Preuve. Lorsqu'on développe $(a+b)^n = (a+b)\times(a+b)\times\ldots\times(a+b)$, on obtient une somme de termes tous de la forme $a^k b^i$ où k et i sont des entiers entre 0 et n.

Si on fixe k dans $[\![0;n]\!]$, c'est-à-dire qu'on a choisi a dans k facteurs parmi les n facteurs, alors on choisit nécessairement b dans les $n-k$ facteurs restants. Le développement de $(a+b)^n$ donne donc une somme de termes de la forme $a^k b^{n-k}$.

Il y a $\binom{n}{k}$ termes de cette forme, car pour obtenir un tel terme il faut choisir k facteurs parmi n dans lesquels on prend a (ou choisir $n-k$ facteurs parmi n dans lesquels on prend b, ce qui est la même chose). Finalement :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

6.3 Somme des coefficients binomiaux

Propriété 20 (Somme des coefficients binomiaux)

Soit n un entier naturel, alors on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

Preuve. Si Card $E = n$, alors on sait d'après la propriété 9 que Card $(\mathscr{P}(E)) = 2^n$.
Pour $0 \leq k \leq n$, notons $\mathscr{P}_k(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal k, alors $\mathscr{P}(E)$ est la réunion disjointe de $\mathscr{P}_0(E)$, $\mathscr{P}_1(E)$, ..., $\mathscr{P}_n(E)$, c'est-à-dire que $\{\mathscr{P}_k(E); 0 \leq k \leq n\}$ est une partition de $\mathscr{P}(E)$.

En d'autres termes, l'ensemble des parties de E est la réunion disjointe des parties de E ayant 0 élément, 1 élément, 2 éléments, ..., n éléments.

De ce fait :

$$\text{Card}\,\mathscr{P}(E) = \sum_{k=0}^{n}\text{Card}\,\mathscr{P}_k(E)$$

Et puisque par définition : Card $\mathscr{P}_k(E) = \binom{n}{k}$, on obtient :

$$\text{Card}\,\mathscr{P}(E) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \iff 2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

Remarque 5. La propriété 19 ($(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$) n'est pas dans le socle du programme (elle est dans les approfondissements possibles), mais si on l'admet, alors la propriété précédente se démontre immédiatement. En effet, en prenant $a = b = 1$ dans l'expression on obtient :

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k}$$
$$2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

6.4 Triangle de Pascal

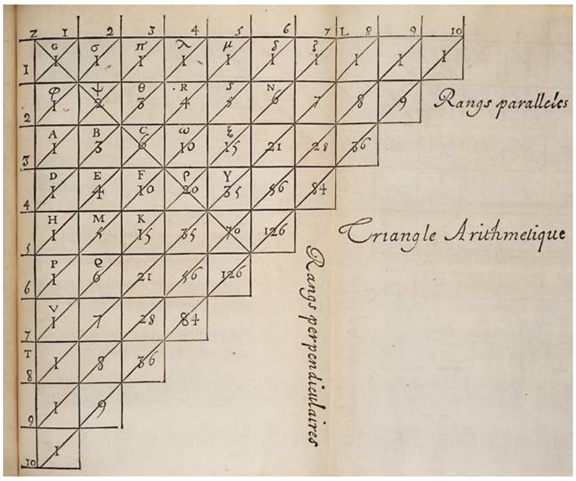
Propriété 21 (Triangle de Pascal)

Soient n et p des entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n-1$.

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Remarque : attention à la condition initiale, il faut que $p \leq n-1$.

Remarque 6. Triangle figurant dans le traité de Blaise Pascal



La valeur de $n+1$ se lit sur la première ligne ou sur la première colonne, et la valeur de p est donnée en comptant le nombre de cases dont on se déplace sur une diagonale en partant de la première ligne ou de la première colonne ($p=0$ sur la $1^{\text{ère}}$ ligne/colonne).
Tout nombre est la somme du nombre situé au-dessus et du nombre situé sur sa gauche.

Ce triangle était connu des mathématiciens persans, maghrébins, et chinois dès le XI$^{\text{e}}$ siècle, mais le nom de Pascal est resté en Occident, en particulier car Blaise Pascal utilisa la première démonstration par récurrence de l'histoire des mathématiques (à moins que ce ne soit parce que nous sommes des occidentaux)

Preuve n° 1 Soient E un ensemble de cardinal $n \geq 1$ et a un élément quelconque de E.

Pour compter les parties de E qui ont p éléments, on va les scinder en deux groupes : celles qui contiennent a, et les autres.

Pour former une partie du premier groupe, il faut choisir $p-1$ éléments (on a déjà choisi a) parmi les $n-1$ éléments qui ne sont pas a ; il y en a donc $\binom{n-1}{p-1}$

Pour former une partie du second groupe, il faut choisir p éléments parmi les $n-1$ éléments qui ne sont pas a ; il y en a donc $\binom{n-1}{p}$

Le nombre de parties à p éléments est la somme de ces deux nombres, donc :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Preuve n° 2 Si vous n'avez pas l'élégance de Pascal, vous pouvez brutalement calculer :

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} \\
&= \frac{(n-1)! \times p}{(p-1)!(n-p)! \times p} + \frac{(n-1)! \times (n-p)}{p!(n-p-1)! \times (n-p)} \\
&= \frac{(n-1)! \times p + (n-1)! \times (n-p)}{p!(n-p)!} \\
&= \frac{(n-1)!\big(p+(n-p)\big)}{p!(n-p)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\
&= \binom{n}{p}
\end{aligned}$$

Exemple 13. On sait que pour tout entier $n \geq 0$, on a $\binom{n}{n} = 1$, ce qui permet d'initialiser le tableau. Et la relation de Pascal permet de compléter les valeurs manquantes :

p \ n	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1		1					
3	1			1				
4	1				1			
5	1					1		
6	1						1	
7	1							1